5. Středoevropská matematická olympiáda

Martin Panák, MU Brno

Pátá středoevropská matematická olympiáda (Midle European Mathematical Olympiad, zkráceně MEMO) se uskutečnila v termínu 1.9.-7.9. 2011 ve Varaždinu v Chorvatsku za účasti šedesáti studentů z deseti zemí středoevropského regionu, jmenovitě z Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska. Soutěž je určená pro studenty středních škol, kteří se v daném kalendářním roce neúčastnili mezinárodní matematické olympiády (IMO). Výjimku tvoří slovinští účastníci, kteří vzhledem k relativně malému počtu obyvatel země nejsou limitovaní předchozí účastí na IMO.

České družstvo tvořili Ondřej Bartoš z Gymnázia Žďár nad Sázavou, Lubomír Grund z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, Jan Kuchařík z Gymnázia Jana Masaryka v Jihlavě, Dominik Steinhauser, z Gymnázia Jana Keplera v Praze, Jan Stopka z Gymnázia Brno na tř. Kpt. Jaroše, a Dominik Teiml z The English Colleague v Praze. Vedoucím družstva byl dr. Martin Panák z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem pak dr. Pavel Calábek z Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci.

Město Varaždin je staré chorvatské město, které bývalo dokonce hlavním městem Chorvatska. Jeho populace dnes čítá na 50 tisíc obyvatel.

První den olympiády měli soutěžící na programu zábavnou seznamovací hru spojenou s poznáváním památek města, zatímco vedoucí výprav vybírali příklady pro soutěž z návrhů zaslaných jednotlivými účastnickými zeměmi. Večer pak proběhlo v prostorách Fakulty informatiky, varaždinské části Univerzity Záhřeb, slavnostní zahájení soutěže.

Druhý den byla na pořadu soutěž jednotlivců v prostorách jedné z Varaždinských základních škol. Každý z účastníků řešil po dobu pěti hodin čtyři příklady. Třetího dne se uskutečnila týmová soutěž, ve které mělo každé národní družstvo k dispozici jednu místnost, kde pak společně řešilo po dobu pěti hodin osm úloh. Již v sobotu večer započala koordinace oprav úloh (úlohy jsou opraveny jednak vedoucími národních týmů a nezávisle i týmem opravovatelů zajištěným organizátory; při koordinaci se výsledky oprav porovnají a případné neshody se vyřeší) a pokračovala i během neděle. V pondělí dopoledne se jury domluvila na rozdělení medailí, které se řídí podobnými pravidly jako na mezinárodní matematické olympiádě. V úterý byl program olympiády zakončen exkurzí na známý chorvatský hrad Trakoščan a návštěvou městečka Krapina, kde se nachází naleziště osídlení neandertálským člověkem. Večerního slavnostního zakončení se zúčastnila řada významných hostů, z nichž jmenujme náměstkyni chorvatského ministra školství Dijanu Vicanovou a rektora Univerzity Záhřeb Aleksu Bjeliše.

Výsledky českého družstva byly následující: Ondřej Bartoš a Dominik Steinhauser získali bronzové medaile, Lubomír Grund a Jan Stopka pak získali čestné uznání za jeden bezchybně vyřešený příklad. V týmovém součtu bodů, které získali jednotliví účastníci daného týmu v individuální soutěži, jsme byli pátí nejlepší. Vlastní týmová soutěž se však českému družstvu příliš nevyvedla, když skončilo osmé. Z vítězství se radoval polský tým, který jako jediný získal maximální možný počet bodů. Plného bodového zisku dosáhl i vítěz soutěže jednotlivců, Wojciech Nadara, rovněž z Polska.

Pořadí	**Jméno**		**Body za úlohy**					**Medaile**
			1	**2**	**3**	**4**	$\sum$	
1.	Wojciech Nadara	POL	8	8	8	8	**32**	G
2.	Attila Szabó	HUN	8	8	7	8	**31**	G
⋮								
27. – 30.	Ondřej Bartoš		3	3	0	8	**14**	B
	Dominik Steinhauser		6	6	2	0	**14**	B
32. – 33.	Jan Kuchařík		5	0	7	0	**12**	
38. – 40.	Jan Stopka		1	0	8	0	**9**	H.M.
41. – 43.	Dominik Grund		8	0	0	0	**8**	H.M.
44. – 46.	Dominik Teiml		3	0	2	2	**7**	

Detailní výsledky českých studentů včetně bodových zisků za jednotlivé úlohy lze vyčíst z předchozí tabulky, výsledky národních družstev v týmové soutěži pak z tabulky následující.

Pořadí	**Jméno**	**Body za úlohu číslo**								
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	$\sum$
1.	Polsko	8	8	8	8	8	8	8	8	**64**
2.	Maďarsko	8	0	8	3	8	8	8	8	**51**
3.	Německo	8	0	8	0	8	8	8	8	**48**
4.	Chorvatsko	2	8	8	0	3	8	8	0	**37**
5.	Slovensko	1	0	8	0	8	6	8	0	**31**
6.	Litva	6	0	8	0	8	0	8	0	**30**
7.	Slovinsko	2	0	8	0	4	3	8	0	**25**
8.	Česko	2	1	4	0	0	5	8	3	**23**
9.	Rakousko	1	0	6	0	5	2	8	0	**22**
10.	Švýcarsko	2	0	6	0	0	0	8	0	**16**

Mnohé další informace o průběhu této olympiády lze najít na webové stránce www.memo2011.hr. Na závěr přikládáme zadání všech úloh obou částí olympiády.

Soutěž jednotlivců

Příklad 1. *Na tabuli je napsáno číslo 44. Celé číslo a napsané na tabuli můžeme nahradit čtyřmi různými celými čísly a_1, a_2, a_3, a_4, jejichž aritmetický průměr $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ je roven číslu a. V jednom kroku současně nahradíme všechna čísla na tabuli výše popsaným způsobem. Po 30 krocích dostaneme na tabuli $n = 4^{30}$ celých čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Dokažte, že*

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n} \geq 2011\,.$$

Příklad 2. *Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo. Jeníček a Mařenka hrají následující hru: Nejdříve Jeníček očísluje strany pravidelného n-úhelníku čísly od 1 do n (v libovolném pořadí; každé číslo použije právě jednou). Potom Mařenka zvolí některých $n-3$ neprotínajících se úhlopříček rozdělujících daný n-úhelník na trojúhelníky. Všechny tyto úhlopříčky se pak očíslují číslem 1, a dovnitř každého z trojúhelníků se napíše součin čísel na jeho stranách. Součet těchto $n-2$ součinů označme S. Jaká bude hodnota součtu S, jestliže snahou Jeníčka je, aby byl součet co největší a Mařenka se snaží, aby byl součet co nejmenší, přičemž oba dělají nejlepší možné volby?*

Příklad 3. *V rovině se kružnice $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$, o středech po řadě I_1 a I_2, protínají ve dvou bodech A a B. Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke $\mathcal{K}_1$ v bodě A protíná $\mathcal{K}_2$ ještě v bodě C a tečna ke $\mathcal{K}_2$ v bodě A protíná $\mathcal{K}_1$ ještě v bodě D. Označme $\mathcal{K}_3$ kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice $\mathcal{K}_3$, který obsahuje bod B. Přímky AC a AD protínají $\mathcal{K}_3$ po řadě ještě v bodech K a L. Dokažte, že přímky AE a KL jsou vzájemně kolmé.*

Příklad 4.

Nechť k a m $(k > m)$ jsou kladná celá čísla taková, že číslo $km(k^2 - m^2)$ je dělitelné číslem $k^3 - m^3$. Dokažte, že $(k-m)^3 > 3km$.

Týmová soutěž

Příklad 1. *Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí*

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x+y) + x^2 + y^2,$$

kde $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel.

Příklad 2.

Nechť kladná reálná čísla a, b, c vyhovují vztahu

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Dokažte, že pak

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Příklad 3. *Pro přirozené číslo $n \geq 3$ označme $\mathcal{M}$ množinu*

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$$

bodů roviny. ($\mathbb{Z}$ značí množinu všech celých čísel.)

Určete největší možný počet prvků podmnožiny $S \subseteq \mathcal{M}$, ve které žádné tři různé body netvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku.

Příklad 4.

Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo. Na soutěž podobnou MEMO přijelo $3n$ účastníků, kteří hovoří n různými jazyky, přitom každý účastník mluví právě třemi různými jazyky.

Dokažte, že z nich lze vybrat aspoň $\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$ jazyků tak, že žádný účastník nehovoří více než dvěma z nich.

($\lceil x \rceil$ je nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno x.)

Příklad 5.

Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má shodné strany. Úhlopříčky AD a EC se protínají v bodě S, přitom $|\angle ASE| = 60°$. Dokažte, že pětiúhelník $ABCDE$ má dvě rovnoběžné strany.

Příklad 6.

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme B_0 a C_0 paty výšek po řadě z vrcholů B and C. Nechť pro vnitřní bod X trojúhelníku ABC je přímka BX tečnou kružnice opsané trojúhelníku AXC_0 a přímka CX je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AXB_0. Ukažte, že přímky AX a BC jsou vzájemně kolmé.

Příklad 7. *Nechť pro neprázdné navzájem disjunktní množiny A a B platí $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Ukažte, že existují čísla $a \in A$ a $b \in B$ tak, že číslo $a^3 + ab^2 + b^3$ je dělitelné 11.*

Příklad 8. *Kladné celé číslo n nazveme úžasné, právě když existují kladná celá čísla a, b, c pro která*

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab).$$

Dokažte, že existuje 2011 po sobě jdoucích úžasných čísel.
(Přitom (m, n) značí největší společný dělitel přirozených čísel m a n.)